На правах рукописи

УДК 519.85

Заботин Игорь Ярославич

МЕТОДЫ ПСЕВДОВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ПАРАМЕТРИЗАЦИЕЙ НАПРАВЛЕНИЙ И АППРОКСИМАЦИЕЙ МНОЖЕСТВ

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Казань — 2010

Работа выполнена на кафедре экономической кибернетики Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Казанский государственный университет им. В. И. Ульянова – Ленина".

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Демьянов Владимир Федорович,

доктор физико-математических наук, профессор
Колоколов Александр Александрович,

доктор технических наук, профессор
Галиев Шамиль Ибрагимович.

Ведущая организация: ГОУВПО "Иркутский государственный университет"

Защита диссертации состоится 25 февраля 2010 г. в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.24 в конференц-зале библиотеки Казанского государственного университета (корп. 2) по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Казанского государственного университета.

Автореферат разослан "___"__________ 20   г.

Ученый секретарь
диссертационного совета, доцент А. И. Еникеев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Математическое программирование до настоящего времени остается актуальным направлением исследований специалистов, работающих в области математической кибернетики и вычислительной матаматики. Несомненно, что наиболее изученным разделом математического программирования является выпуклое программирование, а количество работ в этой области столь велико, что их обзор трудно провести в кратком автореферате. Однако, и в выпуклом программировании находятся все новые и новые теоретические и вычислительные проблемы. Даже в таком, казалось бы хорошо изученном разделе, как линейное программирование, возникает много вопросов его практического использования. В области выпуклого (в том числе и линейного) программирования продолжают активно работать многие ведущие отечественные специалисты по математическому программированию. Например, у Астафьева Н. Н., Васина В. В., Голикова А. И., Гольштейна Е.Г., Евтушенко Ю. Г., Еремина И. И., Жадана В. Г., Колоколова А. А., Попова Л. Д., до настоящего времени выходят работы, относящиеся к теории или методам линейного программирования, а в области нелинейного выпуклого программирования, наряду с уже названными математиками, продолжают получать важные теоретические и практические результаты Антипин А. С., Белоусов Е. Г., Булавский В. А., Булатов В. П., Васильев Ф. П., Галиев Ш. И., Зоркальцев В. И., Ижуткин В. С., Левитин Е. С., Нурминский Е. А., Поляк Б. Т., Третьяков Н. В. и др.

Из раздела нелинейного программирования наибольшие трудности вызывают задачи невыпуклого программирования. Исследованию таких задач и построению методов их решения также уделено немало внимания. У многих, в том числе перечисленных выше авторов, есть значительные работы по невыпуклому программированию. Кроме того, систематические исследования в области невыпуклого анализа и невыпуклого программирования проводились, например, в работах Демьянова В. Ф., Заботина Я. И., Карманова В. Г., Кокурина М. Ю., Коннова И. В., Кораблева А. И., Малоземова В. Н., Немировского А. С., Нестерова Ю. Е., Пшеничного Б. Н., Рубинова А. М., Стрекаловского А. С., Стронгина Р. Г., Третьякова А. А., Федорова В. В., Фазылова В. Р., Хабибуллина Р. Ф., Хамисова О. В., Шора Н. З.

К невыпуклому программированию относится, в частности, раздел псевдовыпуклого программирования. Задачи псевдовыпуклого программирования являются непосредственным расширением класса задач выпуклого программирования. Понятие псевдовыпуклости для дифференцируемых функций было предложено еще в 1965 году О. Мангасарианом. В 1974 году в работе Заботина Я. И. и Кораблева А. И. введено определение недифференцируемых псевдовыпуклых функций и изучены некоторые их свойства. Хотя задача псевдовыпуклого программирования сформулирована уже давно, и на практике встречаются такие задачи, раздел псевдовыпуклого программирования исследован далеко не полно. Несмотря на то, что псевдовыпуклые функции по многим важным свойствам близки к выпуклым, хорошо изученный и развитый аппарат выпуклого анализа обычно не удается непосредственно использовать для построения и обоснования методов псевдовыпуклого программирования.

Данная диссертационная работа относится к исследованиям в области псевдовыпуклого программирования. В работе формулируются и используются принципы построения методов псевдовыпуклого программирования на основе параметризации направлений итерационного перехода и аппроксимации множеств. При этом разрабатываемые методы учитывают специфику как дифференцируемых, так и недифференцируемых псевдовыпуклых функций. Кроме того, исследуются вопросы устойчивости методов псевдовыпуклого программирования, комбинирования их с другими алгоритмами, показана возможность использования этих методов для решения прикладных задач проектирования и управления.

Несмотря на большое число методов нелинейного программирования, и сейчас еще численная реализация многих из них вызывает значительные сложности. Одна из причин заключается в том, что в этих методах при построении итерационных точек приходится решать вспомогательные задачи, которые сами по себе немногим легче исходной задачи. Примерами могут служить алгоритмы выпуклого программирования (варианты метода условного градиента, алгоритмы проекционного типа и др.), где для нахождения направлений перехода решаются задачи минимизации вспомогательных функций при исходных ограничениях. Решение этих задач требует больших вычислительных затрат, когда допустимые множества заданы нелинейными неравенствами. Но даже в тех методах, где, несмотря на общий вид ограничений, задачи построения итерационных точек явно упрощаются по сравнению с исходной задачей (метод возможных направлений, метод линеаризации, методы отсечений и т. д.), число переменных (а часто и ограничений) в этих подзадачах не уменьшается по отношению к исходной задаче. По этой причине при решении задач с большим числом переменных и ограничений построение приближений во многих известных алгоритмах также оказывается весьма трудоемким. Уже эти замечания доказывают актуальность разработки алгоритмов, в которых вспомогательные задачи (несмотря на размерности исходной задачи и общий вид ограничений), остаются относительно простыми, во всяком случае решаются за конечное число шагов и имеют меньшее, чем основная задача, количество переменных и ограничений. Построению именно таких методов псевдовыпуклого программирования посвящены проведенные в диссертации исследования.

Один из принципов, позволяющий упрощать задачи построения приближений, заключается в аппроксимации допустимого множества или его части некоторым другим, например, многогранным множеством. До последнего времени появляются публикации по методам, в которых для нахождения приближений применяется аппроксимация множества допустимых решений множествами более простой структуры. В отличие от известных, разработанные в диссертации процедуры аппроксимации, используются для упрощение решения задач построения не самих приближений, а направлений перехода в итерационных точках, что делает предлагаемые методы реализуемыми.

Второй принцип, на основе которого в методах можно упрощать задачи отыскания приближений, а именно, уменьшать размерности этих задач, заключается в использовании параметризованных направлений итерационного перехода. Размерности задач построения таких направлений зависят не от числа переменных исходной задачи, а от количества параметров, участвующих в формировании направления. Число параметров на каждом шаге может зависить от разных факторов, напрамер, от количества активных ограничений. Значения самих параметров подбираются с помощью решения некоторых вспомогательных задач. В диссертации предлагаются относительно легко решаемые вспомогательные задачи выбора параметров, и на их основе строятся новые алгоритмы псевдовыпуклого программирования. Отметим, что некоторые из предлагаемых методов совмещают оба описанных принципа.

Актуальной остается проблема построения комбинированных методов минимизации, поскольку такие методы могут соединять в себе достоинства всех образующих их алгоритмов. В диссертации уделено внимание построению таких алгоритмов.

Наконец, еще одной актуальной задачей нелинейного программирования является исследование устойчивости методов по отношению к погрешностям вычислений. В диссертации предлагается подход, позволяющий исследовать устойчивость методов безусловной минимизации как выпуклых, так и псевдовыпуклых функций по отношению к ошибкам вычисления градиентов.

Цель работы заключается в построении конструктивных методов минимизации как дифференцируемых, так и недифференцируемых псевдовыпуклых функций с легко реализуемыми алгоритмами, допускающими управление процессами минимизации.

Методы исследований основываются на теории нелинейного программирования, использовании аппарата обобщенно - опорных функционалов, на предложенных в работе способах параметризации направлений, а также введенных автором принципах оценки качества аппроксимации множеств и разработанной на их основе алгоритмизации погружения областей в множества более простой структуры.

Научная новизна. Для минимизации гладких и негладких псевдовыпуклых функций построены новые алгоритмы, основанные на параметрической форме задания направлений итерационного перехода и возможности аппроксимации подмножеств допустимого множества при нахождении направлений. Разработаны новые методики обоснования их сходимости. С новых позиций применяется в диссертации и идея использования погружения допустимой области в множества более простой структуры. Введенные автором критерии качества аппроксимации множеств и основанные на них принципы построения погружающих многогранных множеств позволили разработать новые достаточно простые процедуры отыскания подходящих (в том числе и параметризованных) направлений. Эти процедуры дали возможность не только построить новые алгоритмы в классе методов погружений - отсечений, но и модифицировать некоторые известные методы или предложить их новые реализации. При этом новым результатом является также использование аппроксимирующих множеств в построении подходящих направлений для негладких функций. В диссертации разработана новая методика получения сходящихся смешанных алгоритмов. Новой является и методика исследования устойчивости методов безусловной минимизации псевдовыпуклых функций к погрешностям вычисления частных производных.

Теоретическая и практическая значимость. Принципы параметризации направлений и аппроксимации множеств, заложенные в построенных методах, и разработанная методика обоснования их сходимости могут применяться при построении других новых алгоритмов минимизации гладких и негладких псевдовыпуклых функций, а также для модификации известных методов выпуклого и псевдовыпуклого программирования с целью упрощения задач выбора направлений. Методика исследования устойчивости методов, предложенная и примененная в работе для группы известных и новых алгоритмов, является довольно общей, а потому может быть использована при обосновании устойчивости других методов безусловной минимизации. Тот факт, что в большинстве разработанных методов (в отличие, напр., от известных методов погружений - отсечений) итерационные точки принадлежат допустимой области, важен практически, поскольку методы позволяют решать те прикладные задачи, где целевая функция обладает нужными свойствами лишь в области ограничений (постановка и решение одной такой задачи описаны в последней главе). Практически важным является и то, что задачи выбора направлений в реализациях методов решаются довольно просто, несмотря на общий вид ограничений. Кроме того, размерности этих задач могут быть уменьшены по сравнению с размерностями исходной задачи, что является полезным при решении задач большой размерности. Потребностями практики вызвана и разработка упомянутой выше методики получения комбинированных алгоритмов псевдовыпуклого программирования. На тестовых примерах подтверждены работоспособность предложенных алгоритмов, а также показаны преимущества некоторых из них перед известными идейно близкими алгоритмами выпуклого программирования. Некоторые из построенных методов применены для решения прикладных оптимизационных задач, связанных с проектированием технических систем.

Основные результаты диссертации.

1. Предложен подход к построению методов условной минимизации псевдовыпуклых функций, позволяющий использовать аппроксимацию допустимого множества или его подмножеств для нахождения направлений перехода в итерационных точках. Разработаны принципы аппроксимации, которые дают возможность построения этих направлений путем решения конечного числа задач линейного или квадратичного программирования, несмотря на общий вид ограничений исходной задачи. Сами принципы реализованы в виде итерационных процедур погружений - отсечений, которые позволяют строить аппроксимирующие многогранные множества, удовлетворяющие заданным требованиям, за конечное число шагов, и при этом обладают простыми практическими критериями остановки.

2. Для решения задачи псевдовыпуклого программирования с гладкой целевой функцией разработаны два метода, в которых при построении подходящих направлений решаются задачи минимизации линейных функций на некоторых вспомогательных множествах, содержащихся в допустимой области или содержащих ее. Для той же задачи предложен метод, в котором направления спуска строятся с помощью проектирования градиента целевой функции на специально построенные множества, в частности, охватывающие область ограничений. На идеях метода Ньютона и разработанного проекционного метода построен метод второго порядка, в котором для нахождения подходящих направлений также можно использовать подмножества допустимого множества или содержащие их множества более простого вида. На случай задания ограничений нелинейными функциями для всех четырех методов с применением разработанных процедур аппроксимации построены реализации, в которых подходящие направления находятся путем решения конечного числа задач линейного или квадратичного программирования. На основе построенных алгоритмов предложены удобные с практической точки зрения модификации известных методов выпуклого программирования.

3. Разработан подход к построению методов псевдовыпуклого про-

граммирования, позволяющий уменьшать размерности задач отыскания направлений по отношению к размерностям исходной задачи за счет параметрического представления этих направлений. Предложены разные способы выбора значений параметров на основе решения некоторых экстремальных задач. Показано, что при решении этих вспомогательных задач применимы процедуры аппроксимации их допустимых множеств многогранными множествами. С использованием указанного подхода построен метод типа условного градиента с направлениями в виде линейной комбинации градиентов целевой функции и активных ограничений. При этом коэффициенты комбинации (параметры) могут подбираться несколькими способами путем решения задач линейного программирования. Используя тот же способ представления параметризованных направлений, разработаны два проекционных метода с алгоритмами, позволяющими строить эти направления путем минимизации квадратичных функций при линейных ограничениях. Построены два метода второго порядка, в которых значения параметров при построении направлений находятся минимизацией вспомогательных квадратичных функций на множествах (в частности, многогранных), размерность которых зависит от числа активных ограничений. Предложены алгоритмы с параметризованными направлениями для решения задачи псевдовыпуклого программирования, основанные на идеях метода возможных направлений Зойтендейка и метода линеаризации.

4. Предложены два релаксационных метода минимизации негладких строго псевдовыпуклых функций на выпуклых и строго выпуклых множествах. Для этих методов разработаны алгоритмы, в которых построенными в первой главе процедурами аппроксимации лебеговых множеств направления спуска находятся с помощью решения задач линейного программирования.

5. Показано, что упомянутый способ параметризации направлений может быть применен и для задач с негладкими целевыми функциями. Построен метод условной минимизации псевдовыпуклой функции максимума, в котором направления спуска на каждом шаге строятся в виде линейной комбинации градиентов активных функций исходной задачи, а коэффициенты комбинации находятся путем решения системы линейных неравенств или задачи линейного программирования. Для задачи псевдовыпуклого программирования предложен вариант

метода центров с параметризованними направлениями, строящимися с помощью решения задач линейного программирования.

6. На основе разработанной общей схемы безусловной минимизации гладких функций построены новые одношаговые и многошаговые алгоритмы минимизации псевдовыпуклых функций, модифицированы некоторых известные методы, для алгоритмов, вкладывающихся в схему, обоснована допустимость распараллеливания процесса минимизации, доказана возможность построения на основе реализаций схемы новых сходящихся смешанных алгоритмов. Построены методы спуска по группам переменных, причем, критерии отбора этих групп позволяют производить спуск на каждом шаге в подпространствах любой размерности и допускают комбинирование переходов в подпространствах быстрых и медленных переменных.

7. Предложен подход, позволяющий исследовать устойчивость алгоритмов безусловной минимизации псевдовыпуклых функций по отношению к ошибкам вычисления градиентов. На основе этого подхода доказана устойчивость в указанном смысле многих известных и новых одношаговых и многошаговых алгоритмов выпуклого и псевдовыпуклого программирования.

8. Разработаны методы решения некоторых специальных задач псевдовыпуклого программирования. В частности, предложены два алгоритма минимизации гладких псевдовыпуклых функций на допустимых областях в виде прямого произведения множеств из пространств различной размерности, построен метод условной минимизации функции максимума специального вида.

9. С применением разработанных в диссертации методик проведено обоснование всех предложенных здесь процедур, методов и схем, и для большинства из них получены оценки скорости сходимости. Разработана и использована практически для всех построенных в диссертации алгоритмов методика, позволяющая комбинировать эти алгоритмы с любыми известными или новыми релаксационными методами, не исследуя заново сходимость таких комбинированных методов и оценки их скорости сходимости.

Все перечисленные основные результаты выносятся на защиту.

Апробация работы. Результаты диссертации представлялись и обсуждались в 1984 – 2009 гг. на семинарах кафедры экономической кибернетики Казанского государственного университета, кафедры радиофизики КГУ, семинарах слушателей ФПК и кафедры исследования операций МГУ, республиканском семинаре "Оптимизация вычислений" в Институте кибернетики Украины, семинарах в МЭСИ и Институте проблем управления, семинаре кафедры математической физики МГУ, практически всех итоговых научных конференциях КГУ за указанные годы, а также на Всесоюзной конференции "Статистические методы исследования функционирования сложных технических систем" (Москва, 1983), Научно-технической конференции Куйбышевского политехнического института (1986), 7-ом и 11-ом Всесоюзных симпозиумах "Системы программного обеспечения решения задач оптимального планирования" (Нарва-Йыэсуу, 1982; Кострома, 1990), 7-ой, 8-ой, 11-ой Всесоюзных конференциях "Проблемы теоретической кибернетики" (Иркутск, 1985, Горький, 1988, Волгоград, 1990), Всесоюзной конференции "Методы математического программирования и программное обеспечение" (Свердловск, 1989), 9-ой – 13-ой Всероссийских конференциях "Математическое программирование и приложения" (Екатеринбург, 1995, 1997, 1999, 2003, 2007), Всероссийских конференциях "Проблемы оптимизации и экономические приложения" (Омск, 2003, 2006), "Дискретный анализ и исследование операций" (Новосибирск, 2002, 2004), "Актуальные проблемы математического моделирования и информатики" (Казань, 2002), "Алгоритмический анализ неустойчивых задач" (Екатеринбург, 2001, 2004), 6-ом Всероссийском семинаре "Сеточные методы для краевых задач и приложения" (Казань, 2005), на 5-ой, 8-ой, 10-ой, 11-ой, 14-ой Байкальских международных школах-семинарах "Методы оптимизации и их приложения" (Иркутск, 1980, 1989, 1995, 1998, 2008), Международных конференциях "Проблемы оптимизации и экономические приложения" (Омск, 1997), "Дискретный анализ и исследование операций" (Новосибирск, 2000), 12-ой, 13-ой, 15-ой Международных конференциях "Проблемы теоретической кибернетики" (Нижний Новгород, 1999; Казань, 2002, 2008),

Публикации. По теме диссертации опубликовано 75 научных работ. Результаты, представленные в диссертации, отражены в 60 публикациях приведенного ниже списка литературы. В список входят 12 статей, относящихся к публикациям перечня ВАК ведущих научных журналов и изданий Российской Федерации, и еще 10 статей, опубликованных в изданиях, включенных в системы цитирования "Springer", "Scopus" и др. Все основные результаты работы отражены в 12 статьях, относящихся к упомянутому перечню ВАК. Отметим, что из совместных работ в диссертацию включены только те результаты, которые получены автором лично. Деление результатов совместных публикаций подробно проведено во введении при описании результатов главы 4 и главы 6, где имеются ссылки на такие работы.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы (232 наименования). Общий объем диссертационной работы — 294 страницы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, формулируются цели проводимых в ней исследований, показывается научная новизна результатов, описываются разработанные подходы, на основе которых построены предлагаемые методы псевдовыпуклого программирования, кратко излагается содержание работы.

Первая глава посвящена разработке и обоснованию процедур аппроксимации, которые применяются далее при построении направлений итерационнного перехода в предлагаемых методах условной минимизации гладких и негладких псевдовыпуклых функций. Поскольку процедуры применимы для решения общих задач математического программирования, то результаты первой главы имеют не только вспомогательный характер, но и определенное самостоятельное значение.

В § 1.1 разработаны общие методы решения задачи

$$\min_{x \in G} g(x), \qquad (1)$$

где $G = \bigcap\limits_{j \in J} G_j, J = \{1, \ldots, m\}, G_j \subset R_n$ – выпуклые замкнутые множества, внутренность $\overset{\circ}{G}_j$ множества G_j непуста для всех $j \in J$, $g(x)$ – непрерывная достигающая на G своего минимального значения g^* функция. Подчеркнем, что, в частности, возможен случай $\overset{\circ}{G} = \emptyset$.

Первый метод (процедура π_1) вырабатывает последовательность приближенных решений $\overline{\overline{y}}_i$ следующим образом. Строится выпуклое замкнутое множество M_0, содержащее хотя бы одну точку из множества Y^* решений задачи (1), выбираются точки $y^j \in \overset{\circ}{G}_j \ \ \forall j \in J$ и число $q \in [1, +\infty)$. На i - ом шаге отыскивается точка $\overline{\overline{y}}_i \in M_i \bigcap \{x \in R_n : g(x) \leq g^*\}$. Если $\overline{\overline{y}}_i \in G$, то процесс заканчивается. В противном случае полагается $J_i = \{j \in J \ : \ \overline{\overline{y}}_i \notin G_j\}$, для всех $j \in J_i$ в интервале $(y^j, \overline{\overline{y}}_i)$ находится такая точка $z_i^j \notin \overset{\circ}{G}_j$, что существует $\overline{y}_i^j \in G_j$, удовлетворяющая неравенству $\|\overline{\overline{y}}_i - \overline{y}_i^j\| \leq q \ \|\overline{\overline{y}}_i - z_i^j\|$, для всех $j \in J_i$ выбирается конечное подмножество A_i^j множества $W^1(z_i^j, G_j)$ нормированных обобщенно-опорных к G_j в точке z_i^j векторов и полагается $M_{i+1} = M_i \bigcap \{x \in R_n \ : \ \langle a, x - z_i^j \rangle \ \leq 0 \ \forall a \in A_i^j, \ j \in J_i\}$.

Обсуждаются реализации, связанные с выбором множеств M_0, A_i^j и точек $\overline{\overline{y}}_i$, z_i^j. Если $G_1 = \ldots = G_m = G$, $\overset{\circ}{G} \neq \emptyset$, функция $g(x)$ выпукла, $y^1 = \ldots = y^m = y$, и $y \in \overset{\circ}{G}$, то процедура π_1 близка к известным методам погружений В.П.Булатова.

Теорема 1. *Пусть последовательность $\{\overline{\overline{y}}_i\}$, построенная процедурой π_1, ограничена. Тогда любая ее предельная точка принадлежит множеству Y^*, а если при этом $g(\overline{\overline{y}}_i) = \min\limits_{x \in M_i} g(x) \ \forall i$, то вся последовательность $\{\overline{\overline{y}}_i\}$, сходится к множеству Y^* .*

Приводятся две постановки приближенного решения задачи (1), в которых требуется отыскать точку $\tilde{x} \in G$, удовлетворяющую неравенству $g(\tilde{x}) \leq g^* + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, или неравенству $g(\tilde{x}) \leq \sigma g^*$, где $0 < \sigma < 1$, если $g^* < 0$, и $1 < \sigma < \infty$, если $g^* > 0$. Доказывается, что предложенными процедурами обе задачи решаются за конечное число шагов. При этом предлагаются простые практические критерии остановки работы процедур.

В § 1.2 предлагается в виде процедуры π_2 еще один метод решения задачи (1). В отличие от π_1 множество M_0 в поцедуре π_2 содержит всю область G, а $\overline{\overline{y}}_i$ являются точками приближенного минимума на множествах M_i не целевой функции, а вспомогательных функций $g_i(x) = g(x) + \alpha_i l_i(x)$. При предположении ограниченности $\{\overline{\overline{y}}_i\}$ для процедуры π_2 доказана

Теорема 2. *Пусть для последовательностей $\{\alpha_i\}$, $\{l_i(x)\}$, и множества G выполняются условия любого из перечисленных ниже пунктов:*

1) $\alpha_i \to 0, \ i \to \infty$, последовательность $\{l_i(\overline{\overline{y}}_i)\}$ ограничена;

2) $\alpha_i > 0, \ i = 0, 1, ..., l_i(x) = 0 \ \forall x \in G$, и $l_i(x) > 0 \ \forall x \notin G, \ i = 0, 1, ...;$

3) $\overset{\circ}{G} \neq \emptyset$, $\alpha_i > 0$, $i = 0, 1, ...$, $\alpha_i \to 0$, $i \to \infty$, *функции* $l_i(x)$, $i = 0, 1, ...$, *неотрицательны на множестве* M_0, *и* $l_i(x) \leq \gamma < \infty$ $\forall x \in \overset{\circ}{G}$ *. Тогда любая предельная точка последовательности* $\{\overline{y}_i\}$, *построенной прцедурой* π_2, *принадлежит множеству* Y^*.

Показано, что при определенных способах выбора функций $l_i(x)$ процедуру π_2 можно интерпретировать как варианты некоторых известных методов.

В § 1.3 на тех же идеях отсечений разработаны две процедуры $(\pi_3, \pi_3^{'})$ нахождения точки множества G с непустой внутренностью, которые также применимы для построения подходящих направлений и при этом не требуют знания вспомогательных точек y^j. Пусть $y \notin \overset{\circ}{G}$, P – конечное множество обобщенно-опорных к G в точке y векторов, M_0 – выпуклое ограниченное замкнутое множество, содержащее точку $y^* = \arg\min\limits_{x \in G} \max\limits_{p \in P} \langle p, x - y\rangle$. Согласно поцедуре π_3 на i -ом шаге отыскивается точка $\overline{\overline{y}}_i \in M_i$, удовлетворяющая условию $\max\limits_{p \in P} \langle p, \overline{\overline{y}}_i - y \ \rangle \leq \max\limits_{p \in P} \langle p, y^* - y\rangle$. Если $\overline{\overline{y}}_i \in G$, то процесс заканчивается, в противном случае полагается $h_i = \overline{\overline{y}}_i - y$ и $\overline{y}_i = y + \alpha_i h_i$, где α_i – максимальное из чисел $\alpha \geq 0$, для которых $y + \alpha h_i \in Co(\{y\} \cup G)$, вычисляется

$$\overline{z}_i = \begin{cases} \overline{y}_i, & \alpha_i > 0, \\ \overline{y}_i + \overline{\mu}(\overline{\overline{y}}_i - \overline{y}_i), & \alpha_i = 0, \end{cases}$$

$\overline{\overline{z}}_i = \overline{y}_i + \overline{\overline{\mu}}(\overline{\overline{y}}_i - \overline{y}_i)$, $z_i = \lambda_i \overline{z}_i + (1 - \lambda_i)\overline{\overline{z}}_i$, где $0 < \overline{\mu} \leq \overline{\overline{\mu}} < 1$, $\lambda_i \in [0, 1]$. Далее выбирается такое множество $A_i \subset W^1(z_i, G)$, что для всех $a \in A_i$ выполняется неравенство $\langle a, y - z_i\rangle \leq -\delta$, и полагается $M_{i+1} = M_i \cap \{x \in R_n \ : \ \langle a, x - z_i\rangle \leq 0 \ \forall a \in A_i\}$.

Процедура $\pi_3^{'}$ отличается от π_3 тем, что M_0 содержит всю область G, а при нахождении точек $\overline{\overline{y}}_i$ множество P меняется от шага к шагу.

Лемма 1. *Пусть последовательность* $\{\overline{\overline{y}}_i\}$, *построена процедурой* π_3 *или* $\pi_3^{'}$. *Тогда любая предельная точка этой последовательности принадлежит множеству* G.

Лемма 2. *Пусть* $y \in G \setminus \overset{\circ}{G}$, *последовательности* $\{\overline{\overline{y}}_i\}$, $\{\overline{y}_i\}$, $\{z_i\}$ *построены процедурой* π_3, *и* $0 < \sigma < 1$. *Тогда найдется номер* i_0 *такой, что выполнится неравенство* $\max\limits_{p \in P} \langle p, \overline{y}_{i_o} - y\rangle \leq \sigma \min\limits_{x \in G} \max\limits_{p \in P} \langle p, x - y\rangle$, *причем,* $\overline{y}_{i_o} \in G$.

В виде алгоритмов $R1 - R4$ описываются и обосновываются реализации этих процедур для множеств G специального вида. На основе лемм 1, 2 доказывается, что для псевдовыпуклой функции $f(x)$ алгоритмами $R_1 - R_4$ можно построить за конечное число шагов подходящее в точке $y \in D$ направление, выбирая в качестве G, например, множество $E(f, D, y) = \{x \in R_n : x \in D,\ f(x) \leq f(y)\}$.

Вторая глава посвящена разработке методов условной минимизации гладких псевдовыпуклых функций с простыми реализациями на основе процедур аппроксимации, построенных в предыдущей главе. Предлагаемые в гл. 2 алгоритмы позволяют, несмотря на общий вид ограничений, отыскивать подходящие направления с помощью решения задач линейного или квадратичного программирования.

Решается задача

$$\min\{f_0(x) \mid x \in D\}, \tag{2}$$

где множество $D \subset R_n$ выпукло и замкнуто, $\dim D \leq n$, а функция $f_0(x)$ псевдовыпукла и непрерывно дифференцируема. В §§ 2.1, 2.3 предложены два метода решения этой задачи, объединенные следующей общей схемой. На k -ом шаге методов выбираются множества $D_k \subset R_n$, удовлетворяющие введенным в тех же параграфах условиям A или B (причем, допускается выполнение неравенств $\dim D_k < \dim D$), в множествах D_k отыскиваются определенным образом вспомогательные точки $\bar{x}_k$. Затем из точки x_k по направлению $s_k = \bar{x}_k - x_k$ производится спуск в некоторую промежуточную точку $v_k \in D$, а очередное приближение x_{k+1} произвольно выбирается в D лишь согласно неравенству

$$f_0(x_{k+1}) \leq f_0(v_k). \tag{3}$$

Методы отличаются принципами выбора множеств D_k и точек $\bar{x}_k$. Множества D_k в методах могут полностью или частично содержать область D, а могут и содержаться в ней. Точки $\bar{x}_k$, например, в первом методе находятся из условия

$$\langle f_0'(x_k), \overline{x}_k - x_k \rangle \leq \sigma_k \min_{x \in D_k} \langle f_0'(x_k), x - x_k \rangle, \tag{4}$$

где $\overline{\sigma} \leq \sigma_k \leq 1$. Если положить в методах $D_k = D$, $x_{k+1} = v_k = x_k + \beta_k s_k$, то при условии (4) они совпадают с методом условного градиента. Доказаны теоремы сходимости методов для всех случаев задания промежуточных точек v_k как с условием релаксации, так и без него. При этом для обоснования нерелаксационных вариантов использована методика Ф. П. Васильева. При некоторых дополнительных требованиях на функцию $f_0(x)$ с применением известных теорем В. Г. Карманова получены следующие оценки скорости сходимости методов:

$$f_0(x_m) - f_0^* \leq a_0[1 + a_0\theta m]^{-1}, \; m = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

где $a_0 = f_0(x_0) - f_0^*$, $f_0^* = \min\{f_0(x) \mid x \in D\}$, $\theta > 0$.

Заметим, что за счет условия (3) на этапе перехода от v_k к точке x_{k+1} можно подключать любые известные или новые алгоритмы, в которых итерационные точки принадлежат допустимой области, причем, сходимость таких смешанных алгоритмов остается обоснованной в связи с теоремами сходимости самих методов. Промежуточные точки v_k и условие (3) выбора приближений будут использоваться далее практически во всех предлагаемых методах, поэтому высказанное здесь замечание относительно построения на их основе комбинированных алгоритмов будет иметь силу и в дальнейшем.

В §§ 2.2, 2.4 предлагаются реализации методов из §§ 2.1, 2.3, основанные на различных способах задания множеств D_k и на конечных процедурах π_1, π_3. Полагая в этих процедурах $G = D_k$, $y^j = y = x_k$ и выбирая множество M_0 многогранником, направления s_k строятся в таких реализациях в виде $\alpha_k(\overline{\overline{y}}_i - x_k)$ решением конечного числа задач линейного программирования (см. лемму 2). Отметим, что в виде реализации второго метода построена модификация метода условного градиента, в которой направления находятся путем минимизации традиционной вспомогательной линейной функции на аппроксимирующих D многогранных множествах D_k, построенных процедурами отсечений из гл. 1. В § 2.4 приводятся результаты численных экспериментов, проведенных с предложенными методами. На их основе реализации сравниваются между собой, а также с известными алгоритмами. Выявлены явные преимущества построенных алгоритмов с выбором $D_k = E(f_0, D, y_k)$, где $y_k \in D$, перед методом условного градиента для "овражных" целевых функций.

В § 2.5 для задачи (1) предложен метод проекционного типа, вкладывающийся в ту же схему, что и методы §§ 2.1, 2.3. Направления s_k строятся в нем с помощью проектирования градиента целевой функции на подмножество $D_k \subset D$ или специально построенное множество

Δ_k, в частности, охватывающее область D. Доказаны теоремы сходимости метода, а также оценки скорости сходимости для всех способов задания точек v_k с условием релаксации и без него. Описаны реализации метода. Одна из них представляет собой модификацию метода проекции градиента, в которой на некоторых шагах в случае выполнения определенного условия операция проектирования вспомогательной точки может опускаться. Для задачи (2) с ограничениями D общего вида описаны алгоритмы метода, в которых множества Δ_k строятся в виде многогранных с привлечением упомянутых выше процедур аппроксимации D, и подходящие направления отыскиваются с помощью решения задач квадратичного программирования.

Для задачи (2) с сильно выпуклой функцией $f_0(x)$ в заключительном параграфе гл. 2 предлагается метод второго порядка, основанный на идеях метода Ньютона и алгоритмов из §§ 2.3, 2.5. В предлагаемом методе, в отличие от метода Ньютона, для построения подходящего направления $s_k = \bar{x}_k - x_k$, во-первых, можно использовать не все допустимое множество D, а лишь его часть, например, $D_k = E(f_0, D, x_k)$, и, во-вторых, вспомогательную задачу минимизации традиционной квадратичной функции $F_k(x)$ для нахождения точки $\bar{x}_k$ можно решать не на множествах D или D_k, а на содержащем их специально построенном множестве Δ_k более простого вида. С практической точки зрения аппроксимирующее множество Δ_k удобно строить как многогранное. Тогда задача выбора направления является задачей квадратичного программирования, и может быть решена за конечное число шагов. Способы построения указанных аппроксимирующих множеств на основе разработанных процедур отсечений описаны в § 2.6. Отметим, что на некоторых итерациях метода для отыскания s_k достаточно решить задачу безусловной минимизации $F_k(x)$. Кроме того, в методе заложена возможность нахождения приближений x_{k+1} с использованием условия (3). Доказана сходимость метода, получена оценка его скорости сходимости. Для случая, когда D задается нелинейными неравенствами, предложены реализации метода, в которых направления s_k строятся с помощью решения задач квадратичного программирования.

В третьей главе предлагаются алгоритмы условной минимизации гладких псевдовыпуклых функций с параметризованными направлениями итерационного перехода.

§ 3.1 носит вспомогательный характер. В нем исследуются некоторые свойства задачи (2), где

$$D = \{x \in R_n : \ f_j(x) \leq 0, \ j \in J\}, \tag{6}$$

функции $f_j(x)$ псевдовыпуклы непрерывно дифференцируемы, а множество D регулярно по Слейтеру. Эти свойства связаны со спецификой строящихся далее методов и особенностями обоснования их сходимости.

В § 3.2 ставится и исследуется задача построения в точке $x_k \in D$ подходящего направления в виде

$$s_k = \sum_{i \in I_k} \alpha_i(x_k) f_i^{'}(x_k), \tag{7}$$

где $I_k = J_k \bigcup \{0\}$, J_k – множество ε_k - активных в точке x_k ограничений $f_j(x)$. Для отыскания коэффициентов $\alpha_i(x_k)$ предлагается решать одну из вспомогательных задач минимизации линейной функции $\sum\limits_{i \in I_k} \left\langle f_0^{'}(x_k), f_i^{'}(x_k) \right\rangle \alpha_i$ при некоторых ограничениях на переменные α_i. Изучаются свойства этих задач, и доказывается теорема оптимальности точки x_k. Далее предлагается метод решения задачи (2), (6), в котором на k -ом шаге для построения направления (7) отыскиваются числа $\alpha_i(x_k), i \in I_k$, удовлетворяющие любому из четырех предложенных условий. Одно из них, например, выглядит следующим образом:

$$\sum_{i \in I_k} c_i^k \alpha_i(x_k) \leq \sigma_k \min\{\sum_{i \in I_k} c_i^k \alpha_i | f_j(x_k + \sum_{i \in I_k} \alpha_i f_i'(x_k)) \leq 0, j \in J\},$$

где $c_i^k = \langle f_0'(x_k), \ f_i'(x_k) \rangle$, $0 < \overline{\sigma} \leq \sigma_k \leq 1$. Остальные три отличаются от приведенного наличием дополнительных условий на переменные α_i и (или) заменой ограничений $f_j(x_k + \sum\limits_{i \in I_k} \alpha_i f_i'(x_k)) \leq 0, j \in J$, на ограничения $f_j(x_k + \sum\limits_{i \in I_k} \alpha_i f_i'(x_k)) \leq 0, j \in J_k$. Если $\sum\limits_{i \in I_k} c_i^k \alpha_i(x_k) = 0$, то x_k принадлежит множеству X^* решений задачи (2), (6). Далее следует переход из точки x_k по найденному параметризованному направлению s_k во вспомогательную точку v_k с шагом β_k. Точки x_{k+1} находятся в D из условия (3).

В диссертации разрабатывается новая методика доказательства сходимости методов псевдовыпуклого программирования с параметризованными направлениями вида (7). По этой методике обосновывается сходимость описанного метода для всех видов шагов β_k, доказывается оценка (5) его скорости сходимости.

Заметим, что допустимые области G_k задач поиска значений $\alpha_i(x_k)$, вообще говоря, не являются многогранными, если множество D имеет общий вид. В связи с этим, применяя уже использованные выше принципы аппроксимации множеств, для областей G_k можно строить аппроксимирующие их множества в форме многогранников и, соответственно, ставить задачи поиска коэффициентов $\alpha_i(x_k)$ в (7) в виде задач линейного программирования. С учетом этого замечания в § 3.3 приводится одна из реализаций метода, в которой при нахождении решения $\alpha_i(x_k)$ вспомогательной задачи используются процедуры отсечений π_1 или π_3. Каждая из процедур гарантирует отыскание значений $\alpha_i(x_k)$ за конечное число шагов. В § 3.3 проводится сравнение предложенного метода с идейно близкими известными методами выпуклого программирования, отмечаются его преимущества для определенных типов задач (2), (6). Приводятся также результаты численного сравнения на тестовых примерах некоторых алгоритмов метода между собой и с методом условного градиента.

Далее, для задачи (2) в §§ 3.4, 3.5 предлагаются проекционные алгоритмы, в которых, задачи проектирования могут иметь меньшее по сравнению с исходной задачей число переменных и ограничений, и проектирование вспомогательных точек может осуществляться на некоторые специально построенные многогранные множества. В § 3.4 предлагаются два алгоритма для задачи (2), (6), в которых направления s_k имеют вид (7), а коэффициенты $\alpha_i(x_k)$ отыскиваются с помощью одной из двух задач проектирования градиента целевой функции на некоторые множества D_k из линейного многообразия, определяемого градиентами $f_i'(x_k)$, $i \in I_k$. Как и в предыдущих алгоритмах, найденные направления используются для нахождения точки v_k, а приближение x_{k+1} выбирается из условия (3). Доказаны теорема оптимальности точки x_k и теоремы сходимости методов, а также приведена оценка их скорости сходимости. Поскольку число неизвестных в задачах поиска s_k зависит от количества активных в точке x_k ограничений, то при $m < n$ такие задачи предпочтительнее традиционной задачи выбора направления в методе проекции градиента. К тому же, вторая из вспомогательных задач проектирования имеет и меньшее число ограничений, а при $J_k = \emptyset$ она вообще не требует решения.

На случай задания области D нелинейными функциями в § 3.5 предлагаются модификации этих алгоритмов. В модификациях направления (7) находятся путем проектирования градиента не на множества D_k, как в исходных алгоритмах, а на аппроксимирующие их многогранные множества Δ_k. Множества Δ_k с необходимым качеством аппроксимации строятся за конечное число шагов процедурами отсечений из гл. 1.

Использование параметризованных направлений возможно и в алгоритмах второго порядка. В § 3.6 для задачи (2), (6) с сильно выпуклой целевой функцией предлагается метод, близкий к описанному выше алгоритму из § 2.6. В этом методе при построении направлений s_k коэффициенты $\alpha_i(x_k)$ в (7) отыскиваются путем минимизации вспомогательных выпуклых квадратичных функций от переменных α_i на множествах D_k, заданных неравенствами $f_j(x_k + \sum\limits_{i \in I_k} \alpha_i f_i'(x_k)) \leq 0, j \in J$, или $f_j(x_k + \sum\limits_{i \in I_k} \alpha_i f_i'(x_k)) \leq 0, j \in J_k$. Затем полагается

$$v_k = x_k + \beta_k s_k, \tag{8}$$

и точка x_{k+1} выбирается согласно (3). Сходимость метода обеспечивается за счет различных способов выбора шагов β_k. Несмотря на то, что в описанном методе задачи поиска коэффициентов в определенных случаях имеют меньшие, чем, например, в методе Ньютона, размерности, при задании множества D в общем виде они остаются достаточно сложны. В связи с этим в § 3.7 предлагается модификация метода, позволяющая использовать в задачах выбора направления вместо множеств D_k аппроксимирующие их многогранные множества Δ_k из тех же линейных многообразий, что и D_k. Тогда, несмотря на общий вид D, процедурами отсечений из § 1.1 удается получать искомые коэффициенты $\alpha_i(x_k)$ в (7) с помощью задач квадратичного программирования. В §§ 3.6, 3.7 приводятся обоснования сходимости метода и его модификации, оценки скорости сходимости, а также реализации этих методов.

В § 3.8 предлагается и обосновывается еще один алгоритм решения задачи (2), (6) с параметризованными направлениями (7), который идейно близок к методу возможных направлений Зойтендейка. Если в (2), (6) $n > m$, то задача выбора направления в построенном алгоритме выгодно отличается от традиционной задачи Зойтендейка по числу переменных и ограничений. Приближение x_{k+1} строится здесь также на основе промежуточной точки из условия (3).

В § 3.9 строится алгоритм псевдовыпуклого программирования, основанный на идеях метода линеаризации и близких к нему алгоритмов. В отличие от этих методов предлагаемый алгоритм использует параметризованные направления (7), где коэффициенты находятся путем решения задачи квадратичного программирования. Обоснован критерий оптимальности итерационной точки, доказана теорема сходимости. Заметим, что, как и другие методы гл. 2, 3, данный алгоритм позволяет за счет условия (3) комбинировать его с любыми релаксационными методами, не обосновывая заново сходимость смешанных алгоритмов.

Четвертая глава посвящена построению методов условной минимизации недифференцируемых псевдовыпуклых функций. Методы допускают операцию частичного или полного погружения допустимого множества в многогранники и параметрический способ представления направлений итерационного перехода с целью упрощения вспомогательных задач выбора направлений. Таким образом обосновывается возможность использования разработанных выше принципов аппроксимации и параметризации в негладком случае.

В § 4.1 строятся два релаксационных метода решения задачи (2) с дифференцируемой по направлениям строго псевдовыпуклой функцией $f_0(x)$. В первом методе на k -ом шаге выбирается конечное множество P_k нормированных обобщенно-опорных для функции $f_0(x)$ в точке x_k векторов, отыскивается точка $\overline{x}_k \in D_k = E(f_0, D, x_k)$, удовлетворяющая неравенству

$$\max_{p \in P_k} \langle p, \overline{x}_k - x_k \rangle \leq \sigma_k \min_{x \in D_k} \max_{p \in P_k} \langle p, x - x_k \rangle, \tag{9}$$

где $0 < \overline{\sigma} \leq \sigma_k \leq 1$, вектор $s_k = \overline{x}_k - x_k$ используется в виде (8) для построения промежуточной точки v_k с условием релаксации, а приближение x_{k+1} выбирается согласно (3).

Второй метод отличается от первого тем, что применяется для задачи (2) с дополнительным требованием к области D, но, в то же время, имеет более широкие возможности в выборе множеств P_k. А именно, P_k строятся в нем из обобщенно-опорных для $f_0(x)$ относительно множества D векторов. Для методов доказано следующее утверждение о сходимости.

Теорема 3. *Пусть для функции $f_0(x)$ и множества D выполняются высказанные выше условия, и множество $E(f_0, D, x_0)$ ограничено. Тогда для последовательности $\{x_k\}$, построенной первым из предложенных методов, справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{k\to\infty} f_0(x_k) = f_0^*. \tag{10}$$

Если множество D, кроме того, строго выпукло, то для последовательности $\{x_k\}$, построенной по второму методу, также выполняется равенство (10).

Приводится оценка скорости сходимости методов. Условие (9) позволяет строить такие реализации методов, где для отыскания $\overline{x}_k$ можно использовать алгоритмы $R2$, $R3$ из § 1.3, основанные на процедуре отсечений π_3, в которой $G = D_k$, $y = x_k$, $P = P_k$. При выборе в них множества M_0 в виде многогранника искомая точка находится как $\overline{x}_k = \overline{y}_i$ с помощью решения конечного числа задач линейного программирования.

Развитый в гл. 3 подход с параметризацией направлений распространяется далее на алгоритмы условной минимизации негладкой псевдовыпуклой функции максимума. В § 4.2 ставится задача (2), где $f_0(x) = \max\limits_{i\in J_1} f_i(x)$, $D = \{x \in R_n : f_i(x) \le 0, i \in J_2\}$, функции $f_i(x)$, $i \in J$, псевдовыпуклы и непрерывно дифференцируемы в R_n, а множества индексов J_1, J_2 таковы, что $J_1 \ne \emptyset$, $J_1 \cup J_2 = J$, $J_1 \cap J_2 = \emptyset$,

Для ее решения предлагается метод, в котором направление спуска на каждом шаге строится как линейная комбинация градиентов активных функций, задающих целевую функцию $f_0(x)$ и область D, т. е. в виде $s_k = -\sum\limits_{i\in J(x_k,\varepsilon_k)} \alpha_i^k f_i'(x_k)$. Коэффициенты α_i^k находятся путем решения системы $\sum\limits_{i\in J(x_k,\varepsilon_k)} \langle f_j'(x_k), f_i'(x_k)\rangle \alpha_i \ge \eta_k$, $j \in J(x_k, \varepsilon_k)$, $\alpha_i \ge 0$, $i \in J(x_k, \varepsilon_k)$, $\sum\limits_{i\in J(x_k,\varepsilon_k)} \alpha_i = 1$ при некоторых положительных ε_k, η_k, или решением задачи линейного программирования. Затем вычисляется точка v_k согласно (8) и приближение x_{k+1} из условия (3). При некоторых условиях выбора чисел ε_k, η_k, β_k доказана сходимость метода.

Получены оценки скорости сходимости, описаны алгоритмы метода. За счет параметрического представления направлений эти алгоритмы имеют определенные преимущества перед рядом известных методов нахождения дискретного минимакса в случае, когда общее число функций, определяющих исходную задачу, существенно меньше n.

Использованный в § 4.2 подход можно перенести и на те методы, в которых минимаксными являются вспомогательные задачи построения итерационных точек или направлений перехода. В § 4.3 на примере одного алгоритма решения задачи (2), (6) показывается, каким образом идея параметризации направлений может применяться в методах центров. В предлагаемом алгоритме на k -ом шаге строится вспомогательная функция максимума $F_k(x)$ на основе измененной целевой функции и функций ограничений исходной задачи. В точке x_k находится направление s_k в виде линейной комбинации активных градиентов функции $F_k(x)$. Затем по направлению s_k из точки x_k производится спуск в точку v_k с лучшим значением функции $F_k(x)$, а приближение x_{k+1} находится из условия $F_k(x_{k+1}) \leq F_k(v_k)$. С использованием методики В. Ф. Демьянова и методики § 4.2 доказана сходимость алгоритма. Обсуждаются его реализации и преимущества перед некоторыми методами центров для определенного типа задач.

<u>Пятая глава</u> диссертации посвящена построению методов безусловной минимизации гладких псевдовыпуклых функций и исследованию их устойчивости.

В § 5.1 для задачи

$$\min\{f_0(x) \mid x \in R_n\} \tag{11}$$

с псевдовыпуклой непрерывно дифференцируемой целевой функцией строится общий метод, в котором переход от точек x_k к промежуточным точкам v_k происходит в некоторых линейных многообразиях $M(x_k)$, а затем приближение $x_{k+1} \in R_n$ выбирается согласно условию (3). На k -ом шаге этого метода Выбирается вектор $r_k \in R_n$ и число $\varepsilon_k \geq 0$ так, чтобы $\| r_k \| \leq \varepsilon_k$ и $g_k = f_0'(x_k) + r_k \neq 0$. Задается непустое подмножество индексов $H_k \subset H = \{1, ..., n\}$, выбираются векторы h_i^k, $i \in H_k$, так, чтобы вектор g_k был их линейной комбинацией, и строится линейное многообразие

$$M(x_k) = \{x \in R_n : x = x_k + \sum_{i \in H_k} \alpha_i h_i^k, \ \forall \ \alpha_i \in R_1\}.$$

Далее, отыскивается такая точка $v_k \in M(x_k)$, что $f_0(v_k) \le \omega_k^* + \delta_k, \quad \delta_k \ge 0$, либо $f_0(v_k) \le (1-\lambda_k)f_0(x_k) + \lambda_k\omega_k^*, \quad 0 < \lambda \le \lambda_k \le 1$, где $\omega_k^* = \min\limits_{x\in U(x_k)} f_0(x)$, $U(x_k) = \{x \in R_n : x = x_k + \alpha g_k, \alpha \in R_1\}$. Приближение $x_{k+1} \in R_n$, как уже отмечено, выбирается из условия (3).

Доказано, что при $\varepsilon_k \le \varepsilon < \infty \ \forall k$, $\delta_k \to 0, \ k \to \infty$, и дополнительном условии $\langle f_0'(x_k), r_k\rangle \ge -\gamma \parallel f_0'(x_k) \parallel^2$, $0 \le \gamma < 1$ на вектора r_k для последовательности $\{x_k\}$, построенной этим методом, выполняется равенство (10). Кроме того, доказаны еще две теоремы сходимости метода при других условиях выбора чисел δ_k и точек v_k. Получены оценки скорости сходимости метода для псевдовыпуклых и сильно выпуклых функций $f_0(x)$.

Отметим, что размерности многообразий $M(x_k)$ задаются на каждом шаге произвольно от 1 до n. За счет большой свободы в выборе множеств $M(x_k)$, вспомогательных точек v_k и приближений x_{k+1} метод допускает значительное число реализаций, которые приводятся в § 5.2. Среди них – известные алгоритмы выпуклого программирования, их модификации и новые алгоритмы минимизации псевдовыпуклых функций. К известным алгоритмам, которые являются реализациями предложенного метода, относятся методы наискорейшего спуска, покоординатного спуска, обобщенный метод градиентного спуска, метод изменения масштабов, метод Ньютона с регулировкой шага, квазиньютоновские алгоритмы, варианты метода сопряженных градиентов и многие другие. Для каждого из этих методов, а также для всех предлагаемых новых алгоритмов в § 5.2 доказывается выполнение тех или иных условий теорем сходимости общего метода и теорем, касающихся оценок его скорости сходимости. Тем самым для многих исследуемых в § 5.2 методов выпуклого программирования и новых алгоритмов обосновывается возможность их использования для задачи псевдовыпуклого программирования (11) и доказываются оценки скорости сходимости для псевдовыпуклых и сильно выпуклых функций. Таким образом, предложенный в § 5.1 подход к разработке методов решения задачи (11) позволяет строить новые одношаговые и многошаговые алгоритмы с практически произвольными процедурами обновления, модифицировать известные методы, расширяя их возможности в выборе направлений и шаговых множителей, а также по единой методике исследовать сходимость методов и получать оценки скорости сходимости. Кроме того, поскольку процесс отыскания приближения x_{k+1} из условия (3) в методе не конкретизирован, то за счет чередования различных способов построения точек v_k и x_{k+1} можно получать всевозможные смешанные алгоритмы на основе известных и новых методов без дополнительного обоснования их сходимости.

В отдельный параграф (§ 5.3) выделены еще два алгоритма решения задачи (11), которые идейно близки к общему методу из § 5.1, но формально в него не вкладываются и потому обосновываются по другой методике. Эти алгоритмы уместно отнести к классу методов спуска по группам переменных. В § 5.3 предлагаются два критерия отбора групп переменных, участвующих в итерационных переходах. Один из этих критериев выглядит следующим образом. Подмножество $H_k \subset H = \{1, ..., n\}$ номеров переменных, по которым производится спуск на k -ом шаге выбирается из условия

$$\sum_{i \in H_k} \left| \frac{\partial f_0(x_k)}{\partial \xi_i} \right| \geq \sigma_k \sum_{i \in H} \left| \frac{\partial f_0(x_k)}{\partial \xi_i} \right|,$$

где $0 < \sigma \leq \sigma_k \leq 1$. Оба предлагаемых критерия, во-первых, просты для проверки, во-вторых, гарантируют сходимость методов указанного класса, и в-третьих, позволяют выбирать на каждом шаге число переменных, входящих в эти группы, любым от 1 до n, т. е. производить переход в подпространствах любой размерности. На базе этих критериев и строятся упомянутые алгоритмы спуска по группам переменных. В том же § 5.3 доказываются теоремы их сходимости, обосновываются оценки скорости сходимости для псевдовыпуклой и сильно выпуклой функции, описываются реализации. Среди этих реализаций есть известные методы выпуклого программирования, которые, благодаря доказанным в § 5.3 теоремам, могут использоваться при решении более общих задач псевдовыпуклого программирования. Как и в некоторых известных эвристических методах, в предлагаемых здесь алгоритмах допустимо чередование шагов в подпространствах быстрых и медленных переменных, причем, размерности этих подпространств можно задавать заранее на каждой итерации. За счет условия (3) выбора точек x_{k+1} алгоритмы допускают их комбинирование с другими методами из этого же или другого класса.

Следующие три параграфа главы посвящены исследованию устойчивости алгоритмов решения задачи (11) к ошибкам вычисления градиентов. Устойчивость в том или ином смысле методов выпуклого программирования изучается во многих работах, но используемые там подходы в большинстве случаев опираются на то, что исследуемые методы применяются для минимизации выпуклых, а не псевдовыпуклых функций. Предлагаемый здесь подход позволяет исследовать устойчивость в указанном смысле методов как выпуклого, так и псевдовыпуклого программирования. Этот подход основывается на разработанной в § 5.4 общей схеме решения задачи (11), в которой заложена возможность неточного вычисления градиентов целевой функции в итерационных точках. Поскольку сходимость и оценки скорости сходимости доказываются для схемы с учетом погрешностей вычислений, то тем самым обосновывается устойчивость тех алгоритмов, которые вкладываются в эту схему и в которых погрешности вычисления градиентов удовлетворяют тем же условиям, что и в общей схеме. Предлагаемая схема близка к методу из § 5.1. Итерационные переходы в ней тоже осуществляются в некоторых линейных многообразиях $M(x_k)$, но построенных с использованием неточно вычисленных градиентов. За счет определенной свободы в выборе многообразий $M(x_k)$ схема допускает различные реализации, среди которых – известные и новые алгоритмы. В §§ 5.5, 5.6 для этих алгоритмов на основе сформулированного выше принципа исследуется их устойчивость в указанном смысле. При этом приходится доказывать, что каждый из алгоритмов является частным случаем общей схемы. В указанных параграфах исследованы на устойчивость метод обобщенного градиентного спуска, так называемый нелинейный метод, методы покоординатного спуска и Ньютона, квазиньютоновские алгоритмы, метод многопараметрического поиска, а также многие другие известные и новые одношаговые и многошаговые алгоритмы. Отметим, что для многих исследованных алгоритмов справедливы оценки скорости сходимости общей схемы, полученные с учетом погрешностей вычисления градиентов, для псевдовыпуклых и сильно выпуклых функций.

Заключительная <u>шестая глава</u> диссертации посвящена разработке методов решения задач псевдовыпуклого программирования специального вида, а также решению некоторых прикладных задач проектирования технических систем построенными в данной работе алгоритмами.

Зачастую практические оптимизационные задачи вида (2) обладают специфической структурой за счет особенностей задания целевой функции или допустимого множества. В гл. 6 приведены соответствующие примеры и ссылки. Одной из таких особенностей можно считать задание области D в (2) в виде прямого произведения выпуклых замкнутых множеств D_i, $i = 1, ..., m$, из пространств R_{n_i}, вообще говоря, различных размерностей. В § 6.1 строятся два метода минимизации гладкой псевдовыпуклой функции на множестве указанного вида. Методы характерны тем, что на каждом шаге итерационный переход при желании может производиться в них лишь по части переменных задачи. В диссертации предлагается отличный от известных принцип выбора групп переменных, по которым производится спуск на каждом шаге. Формирование этих групп происходит в результате решения m вспомогательных задач минимизации некоторых вспомогательных функций на множествах D_i. Построенные на основе предложенного принципа методы отличаются друг от друга тем, что спуск на k -ом шаге в выбранном подпространстве происходит либо по конкретным направлениям, либо с большой долей свободы, привлекая любые релаксационные процедуры. Заложенный в методах критерий выбора групп переменных гарантирует их сходимость, позволяет заранее задавать желательную размерность подпространств, в которых производится спуск, дает возможность построения различных реализаций. Отметим, что предложенные методы можно комбинировать с другими алгоритмами, а решение задач минимизации вспомогательных функций на множествах D_i можно проводить одновременно на многопроцессорных ЭВМ.

В § 6.2 ставится еще одна задача $\min\{F(x) \mid x \in D\}$ специального вида. Функция $F(x)$ представляет собой функцию максимума, характерную тем, что каждая из составляющих ее непрерывных функций $f_i(x_i)$, $i = 1, ..., m$, зависит от переменных $x_i \in R_{n_i}$, не связанных с переменными остальных функций, а область D, как и в § 6.1, задана в виде прямого произведения выпуклых замкнутых множеств $D_i \subset R_{n_i}$. Для поставленной задачи строится и обосновывается метод, который также можно отнести к алгоритмам спуска по группам переменных. Переход из текущей итерационной точки $x^k = (x_1^k, ..., x_m^k)$, $x_i^k \in D_i$, производится в методе лишь по тем переменным x_i, для которых соответствующие функции $f_i(x_i)$ являются активными в точке x^k. Спуск по выбранным переменным x_i производится в областях D_i с привлечением любых, вообще говоря различных, сходящихся алгоритмов.

В § 6.3 предлагается один метод субградиентного типа для задачи отыскания седловых точек выпукло - вогнутых функций. Для построенной этим методом последовательности приближений доказывается сходимость по функционалу без предположения об устойчивости множества решений.

В заключительном параграфе главы 6 приводятся примеры использования некоторых из предложенных в диссертации методов для решения прикладных задач. В рамках договоров между Казанским государственным университетом и российскими предприятиями, связанными с проектированием технических систем, в течение ряда лет с участием автора ставились и решались оптимизационные задачи синтеза радиоэлектронных систем и их отдельных подсистем. Некоторые из задач описаны в § 6.4 и решены с применением разработанных здесь алгоритмов.

Публикации

1. Заботин И. Я. О методах безусловной минимизации функции, использующих симплекс // Исслед. по прикл. матем. – Казань: Изд - во КГУ, 1979. – Вып. 7. – С. 55 – 64.

2. Заботин И. Я. К вопросу о выборе направлений спуска в задачах безусловной минимизации функций // Исслед. по прикл. матем. – Казань: Изд - во КГУ, 1981. – Вып. 9. – С. 37 – 42.

3. Заботин И. Я. Об одном методе типа условного градиента с частичным погружением допустимого множества // Системы программного обеспечения решения задач оптимального планирования. Тез. докл. 7 Всесоюз. симп. (Нарва - Йыэсуу, 16 - 24 апр. 1982 г.) – М.: ЦЭМИ АН СССР, 1982. – С. 132.

4. Заботин И. Я. О методах безусловной минимизации функций с наилучшими относительно множества направлениями спуска // Изв. вузов. Математика. – 1982. – N 7. – С. 11 – 16.

5. Заботин И. Я. Один вариант метода Ньютона с погружением допустимого множества. – Казань, КГУ, 1983. – 11 с. – Деп. в ВИНИТИ 20.01.83, N 353 - 83.

6. Заботин И. Я. Итеративная регуляризация метода условного градиента с погружением допустимого множества. – Казань, КГУ, 1983. – 15 с. – Деп. в ВИНИТИ 16.02.83., N 852 - 83.

7. Заботин И. Я., Кобчиков А. В., Крейнин М. И., Лямин Е. В. Статистический метод проектирования информационно - управляющих систем // Статистические методы исследования функционирования сложных технических систем (качество, эффективность, надежность). Материалы Всесоюз. науч. - практич. сем. (Москва, 24 - 26 мая 1983 г.) – М.: МЭСИ, 1983. – Ч. 1. – С. 212 – 213.

8. Заботин И. Я. Метод обобщенно - опорных гиперплоскостей для решения задачи математического программирования. – Казань, КГУ, 1982. – Деп. в ВИНИТИ 25.08.83., N 4633 - 83. – С. 19 – 28.

9. Заботин И. Я., Боглаевский О. В. О нерелаксационном процессе в методе минимизации функций с частичным погружением допустимого множества. – Казань, КГУ, 1982. – Деп. в ВИНИТИ 25.08.83., N 4633 - 83. – С. 29 – 34.

10. Заботин И. Я., Кораблев А. И. Метод условного ε - субградиента // Изв. вузов. Математика. – 1983. – N 9. – С. 22 – 26.

11. Заботин И. Я. Метод типа проекции градиента, использующий погружение допустимого множества // Исслед. по прикл. матем. – Казань: Изд - во КГУ, 1984. – Вып. 11, часть 1. – С. 3 – 11.

12. Заботин И. Я., Лямин Е. В. Об одном варианте метода условного градиента // Исслед. по прикл. матем. – Казань: Изд - во КГУ, 1984. – Вып. 11, часть 1. – С. 11 – 23.

13. Заботин И. Я., Кобчиков А. В., Лямин Е. В. Применение одного варианта метода условного градиента для численного решения задачи синтеза информационно-управляющей системы // Прием и обработка информации в сложных информационных системах. – Казань: Изд - во КГУ, 1984. – Вып. 14. – С. 27 – 34.

14. Заботин И. Я., Кораблев А. И. Метод условного ε - субградиента для минимизации квазивыпуклых функций // Проблемы теоретической кибернетики. Материалы 7 Всесоюз. конф. – Иркутск, 1985. – Ч. 2. – С. 64 – 65.

15. Заботин И. Я., Крейнин М. И. Релаксационный субградиентный метод минимизации строго выпуклых функций // Исслед. по прикл. матем. – Казань: Изд - во КГУ, 1987. – Вып. 14. – С. 34 – 42.

16. Заботин И. Я., Кобчиков А. В. Выбор оптимальных времен

функционирования подсистем в информационно - управляющих системах // Прием и обработка информации в сложных информационных системах. – Казань: Изд - во КГУ, 1987. – Вып. 16. – С. 10 – 19.

17. Заботин И. Я. О минимизации функции максимума с разделяющимися переменными // Проблемы теоретической кибернетики. Тез. докл. 8 Всесоюз. конф. (июль, 1988) – Горький, 1988. – Ч. 1. – С. 119.

18. Заботин И. Я. Субградиентный метод отыскания седловой точки выпукло - вогнутой функции // Исслед. по прикл. матем. – Казань: Изд - во КГУ, 1988. – Вып. 15. – С. 6 – 12.

19. Заботин И. Я. О двух декомпозиционных методах типа координатного спуска // Методы математич. программирования и программное обеспечение. Тез. докл. 6 науч. конф. (Свердловск, 27 февр. – 3 марта 1989 г.) – Свердловск: УрО АН СССР, 1989. – С. 94.

20. Заботин И. Я. О декомпозиционных методах решения некоторых экстремальных задач // Методы оптимизации и их приложения. Материалы Междунар. Байкальской школы - семинара (Иркутск, 10 – 19 сент. 1989 г.) – Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1989. – С. 95.

21. Заботин И. Я. О минимизации функции максимума специального вида // Исслед. по прикл. матем. – Казань: Изд - во КГУ, 1989. – Вып. 16. – С. 101 – 108.

22. Заботин И. Я. О двух декомпозиционных методах условной минимизации функций // Системы программного обеспечения решения задач оптимального планирования. Тез. докл. 11 Всесоюз. симп. (Кострома, 21 – 29 мая 1990 г.) – М: ЦЭМИ АН СССР, 1990. – С. 22.

23. Заботин И. Я., Кобчиков А. В. О выборе оптимальных соотношений между массами блоков радиоэлектронной системы // Прием и обработка информации в сложных информационных системах. – Казань: Изд - во КГУ, 1990. – Вып. 18. – С. 64 – 70.

24. Заботин И. Я., Кобчиков А. В., Пилюгин А. Г. О выборе оптимального числа радиолокационных станций в многопозиционных радиоэлектронных системах // Прием и обработка информации в сложных информационных системах. – Казань: Изд - во КГУ, 1990. – Вып. 18. – С. 70 – 75.

25. Заботин И. Я., Кобчиков А. В. О реализациях некоторых методов, применяемых при решении оптимизационных задач проектирования // Автоматика и телемеханика. – 1991. – N 1. – С. 169 –

172.

26. Заботин И. Я. Методы спуска по группам переменных для условной минимизации функций // Проблемы теоретической кибернетики. Тез. докл. 11 Всесоюз. конф. (сентябрь, 1990) – Волгоград, 1990. – Ч. 1(2). – С. 26.

27. Заботин И. Я. О некоторых методах спуска по группам переменных // Исслед. по прикл. матем. – Казань: Изд - во КГУ, 1992. – Вып. 19. – С. 24 – 33.

28. Заботин И. Я. Методы спуска по группам переменных для одного класса задач условной минимизации // Исслед. по прикл. матем. – Казань: Изд - во КГУ, 1992. – Вып. 18. – С. 48 – 59.

29. Заботин И. Я. Алгоритмы с комбинированием активных градиентов для отыскания условного минимакса // Изв. вузов. Математика. – 1993. – N 12. – С. 52 – 58.

30. Заботин И. Я. Метод минимизации с выбором направлений в виде комбинации активных градиентов // Математич. программирование и приложения. Тез. докл. 9 Всерос. конф. (Екатеринбург, 27 февр. – 3 мар. 1995 г.) – Екатеринбург, 1995. – С. 98.

31. Заботин И. Я., Князев Е. А. Об одном варианте метода центров с адаптацией параметра // Математич. программирование и приложения. Тез. докл. 9 Всерос. конф. (Екатеринбург, 27 февр. – 3 мар. 1995 г.) – Екатеринбург, 1995. – С. 99.

32. Заботин И. Я., Князев Е. А. О некоторых вариантах параметризованного метода центров // Методы оптимизации и их приложения. Материалы 10 Байкальской Междунар. школы - семинара (Иркутск, 14 – 19 авг. 1995 г.) – Иркутск, 1995. – С. 99.

33. Заботин И. Я., Князев Е. А. Вариант параметризованного метода центров // Изв. вузов. Математика. – 1995. – N 12. – С. 26 – 32.

34. Заботин И. Я. Метод условной минимизации с параметрическим заданием подходящих направлений // Изв. вузов. Математика. – 1996. – N 12. – С. 17 – 29.

35. Заботин И. Я. Об алгоритмах минимизации с параметризованными направлениями спуска // Математич. программирование и приложения. Тез. докл. 10 Всерос. конф. (Екатеринбург, 24 – 28 февр. 1997 г.) – Екатеринбург, 1997. – С. 96.

36. Заботин И. Я. Алгоритмы прекционного типа с параметричес-

ким заданием подходящих направлений // Проблемы оптимизации и экономические приложения. Материалы Междунар. конф. (Омск, 1 – 5 июля 1997 г.) – Омск, 1997. – С. 73.

37. Заботин И. Я. Алгоритм второго порядка с параметризованными направлениями для задач условной оптимизации // Изв. вузов. Математика. – 1997. – N 12. – С. 62 – 72.

38. Заботин И. Я. Многошаговые алгоритмы безусловной минимизации псевдовыпуклых функций // Методы оптимизации и их приложения. Труды 11 Междунар. Байкальской школы - семинара (Иркутск, Байкал, 5 – 12 июля 1998 г.) – Т. 1. – Иркутск, 1998. – С. 77 – 80.

39. Заботин И. Я. Об алгоритмах второго порядка с параметрическим заданием подходящих направлений // Методы оптимизации и их приложения. Труды 11 Междунар. Байкальской школы - семинара (Иркутск, Байкал, 5 – 12 июля 1998 г.) – Т. 1. – Иркутск, 1998. – С. 51.

40. Заботин И. Я. Об одном подходе к построению алгоритмов безусловной минимизации псевдовыпуклых функций // Изв. вузов. Математика. – 1998. – N 12. – С. 29 – 39.

41. Заботин И. Я. Некоторые многошаговые методы безусловной минимизации и их устойчивость // Математич. программирование и приложения. Тез. докл. 11 Всерос. конф. (Екатеринбург, 22 – 26 февр. 1999 г.) – Екатеринбург, 1999. – С. 110.

42. Заботин И. Я. Об устойчивости некоторых методов безусловной минимизации // Проблемы теоретической кибернетики. Материалы 12 Междунар. конф. (Нижний Новгород, 17 – 22 мая, 1999 г.) – Ч. 1. – М.: МГУ, 1999. – С. 75.

43. Заботин И. Я. Об алгоритмах с параметризованными направлениями в псевдовыпуклом программировании // Дискретный анализ и исследование операций. Материалы Междунар. конф. (Новосибирск, 26 июня – 1 июля 2000 г.) – Новосибирск, 2000. – С. 110.

44. Заботин И. Я. Об устойчивости алгоритмов безусловной минимизации псевдовыпуклых функций // Изв. вузов. Математика. – 2000. – N 12. – С. 33 – 48.

45. Заботин И. Я. Один способ исследования устойчивости алгоритмов безусловной минимизации псевдовыпуклых функций // Алгоритмический анализ неустойчивых задач. Тез. докл. Всерос. науч.

конф. (Екатеринбург, 26 февр. – 2 марта 2001 г.) – Екатеринбург, Изд - во Уральского ун - та, 2001. – С. 216.

46. Заботин И. Я. О сходимости алгоритмов безусловной минимизации псевдовыпуклых функций при наличии помех // Проблемы теоретич. кибернетики. Материалы 13 Междунар. конф. (Казань, 27 – 31 мая, 2002 г.) – Ч. 1. – М.: Изд - во центра прикладн. исследований при механико - математич. фак. МГУ, 2002. – С. 65.

47. Заботин И. Я. Проекционные алгоритмы с параметризованными направлениями спуска в псевдовыпуклом программировании // Исслед. по прикл. матем. и информатике – Казань: Изд - во Казанск. матем. общества, 2001. – Вып. 23. – С. 67 – 81.

48. Заботин И. Я. Вариант метода линеаризации с параметрическим заданием направлений итерационного перехода // Дискретный анализ и исследование операций. Материалы Российской конф. (Новосибирск, 24 – 28 июня 2002 г.) – Новосибирск: Изд - во Института математики, 2002. – С. 162.

49. Заботин И. Я. Метод с параметризованными направлениями для минимизации псевдовыпуклой функции // Актуальные проблемы математического моделирования и информатики. Материалы науч. конф. (Казань, 30 янв. – 6 февр. 2002 г.) – Казань: Изд - во Казанск. матем. общества, 2002. – С. 41 – 42.

50. Заботин И. Я. Метод минимизации негладкой строго псевдовыпуклой функции // Математич. программирование и приложения. Тез. докл. 12 Всерос. конф. (Екатеринбург, 24 – 28 февр. 2003 г.) – Екатеринбург, 2003. – С. 109.

51. Заботин И. Я. Метод условной минимизации строго выпуклых недифференцируемых функций // Проблемы оптимизации и экономические приложения. Материалы Всерос. конф. (Омск, 1 – 5 июля 2003 г.) – Омск: Наследие. Диалог Сибирь, 2003. – С. 120.

52. Заботин И. Я. Релаксационные алгоритмы условной минимизации негладких строго псевдовыпуклых функций // Изв. вузов. Математика. – 2003. – N 12. – С. 62 – 70.

53. Заботин И. Я. Алгоритм условной минимизации строго псевдовыпуклых функций // Алгоритмический анализ неустойчивых задач. Тез. докл. Всерос. конф. (Екатеринбург, 2 – 6 февр. 2004 г.) – Екатеринбург: Изд - во Уральского ун - та, 2004. – С. 273 – 274.

54. Заботин И. Я. О методах условной минимизации негладких

строго псевдовыпуклых функций // Дискретный анализ и исследование операций. Материалы Российской конф. (Новосибирск, 24 – 28 июня 2004 г.) – Новосибирск: Изд - во Института математики, 2004. – С. 162.

55. Заботин И. Я. Одна общая схема решения задачи математического программирования и ее использование в алгоритмах минимизации псевдовыпуклых функций // Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы Всерос. семинара. (Казань, 1 – 4 окт. 2005 г.) – Казань: Изд - во КГУ 2005. – С. 83 – 86.

56. Заботин И. Я. Две процедуры отсечений и их использование в методах минимизации // Проблемы оптимизации и экономические приложения. Материалы 3 Всерос. конф. (Омск, 11 – 15 июля 2006 г.) – Омск, 2006. – С. 139.

57. Заботин И. Я. Схема решения задачи псевдовыпуклого программирования и ее реализации на основе процедур отсечений // Инфрормационный бюллетень N 11 Ассоциации математического программирования. Конф. "Математич. программирование и приложения" (Екатеринбург, 26 фев. – 2 мар. 2007 г.) – Екатеринбург: УрО РАН, 2007. – С. 47 – 48.

58. Заботин И. Я. Применение некоторых процедур отсечений в методах псевдовыпуклого программирования // Проблемы теоретич. кибернетики. Материалы 15 Междунар. конф. (Казань, 2 – 7 июня 2008 г.) – Казань: Отечество, 2008. – С. 38.

59. Заботин И. Я. Общая процедура отсечений и ее использование в реализациях некоторых алгоритмов минимизации // Методы оптимизации и их приложения. Труды 14 Междунар. Байкальской школы - семинара. – Т. 1. – Иркутск, ИСЭМ СО РАН, 2008. – С. 245 – 253.

60. Заботин И. Я. Метод с параметризацией направлений спуска и его реализации на основе процедур аппроксимации множеств // Проблемы оптимизации и экономические приложения. Материалы 4 Всерос. конф. (Омск, 29 июня – 4 июля 2009 г.) – Омск, 2009. – С. 139.